№2

Разложим значение $(3+\sqrt{7})^{100}$ по биному Ньютона:

① $(3+\sqrt{7})^{100} = 3^{100} + C_{100}^{1}\cdot 3^{99}\sqrt{7} + C_{100}^{2}\cdot 3^{98}(\sqrt{7})^2 + \ldots + (\sqrt{7})^{100}$

Аналог. для $(3-\sqrt{7})^{100}$:

② $(3-\sqrt{7})^{100} = 3^{100} - C_{100}^{1}\cdot 3^{99}\cdot\sqrt{7} + C_{100}^{2}\cdot 3^{98}\cdot(\sqrt{7})^2 - \ldots + (\sqrt{7})^{100}$

Нас просят найти 30-ую цифру после запятой $\Rightarrow$ не имеет смысла рассматривать целую часть выражения ②.

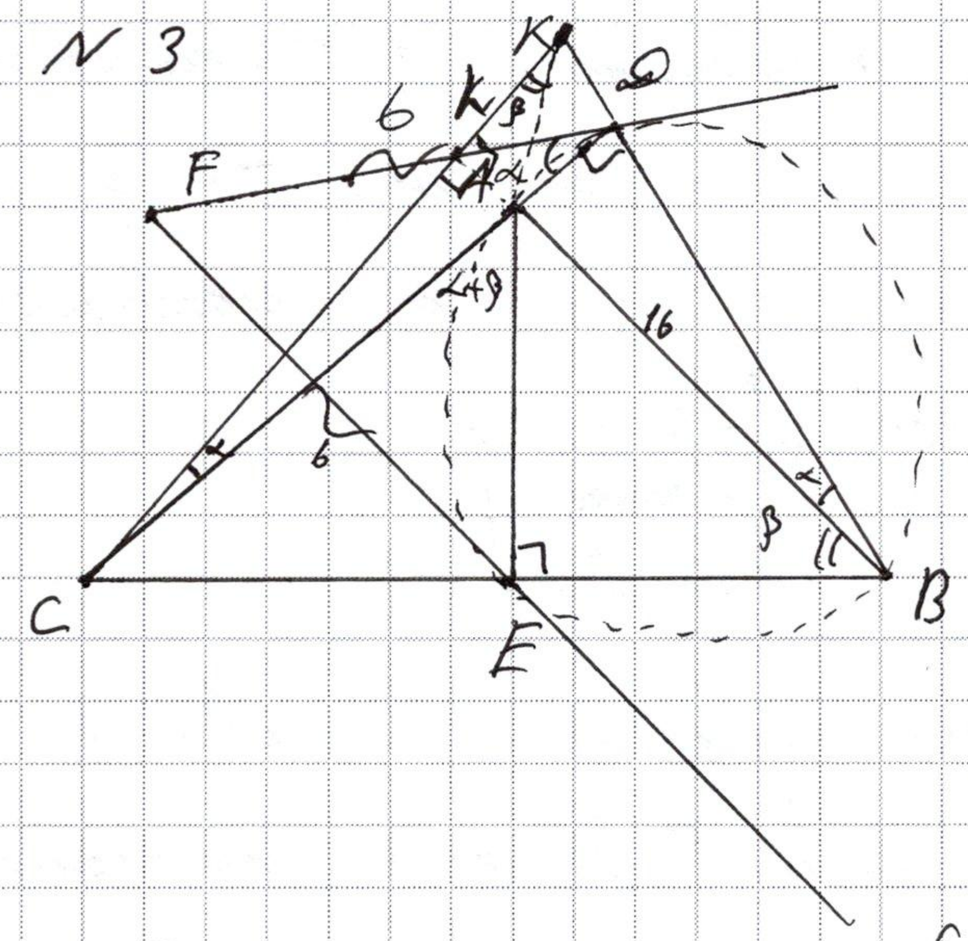
Теперь заметим, что ① + ② дает выражение сод. $\sqrt{7}$:

$$① - ② = 2\cdot C_{100}^{1}\cdot 3^{99}\cdot\sqrt{7} + 2\cdot C_{100}^{3}\cdot 3^{97}\cdot 7\cdot\sqrt{7} + \ldots + 2\cdot C_{100}^{99}\cdot 3\cdot 7^{49}\cdot\sqrt{7} =$$

$$= 2\cdot\sqrt{7}\cdot\left(\sum_{i=0}^{i=49} C_{100}^{1+2i}\cdot 3^{99-2i}\cdot 7^{i}\right) = 2\cdot\sqrt{7}\cdot\left(C_{100}^{1}\cdot 3^{99} + C_{100}^{3}\cdot 3^{97}\cdot 7 + C_{100}^{5}\cdot 3^{95}\cdot 7^2 + \ldots\right.$$

$$\left. + C_{100}^{97}\,3^{3}\cdot 7^{48} + C_{100}^{99}\,3\cdot 7^{49}\right) = (3+\sqrt{7})^{100} - (3-\sqrt{7})^{100} = (3+\sqrt{7})^{100} - 2^{100}\cdot(3+\sqrt{7})^{-100}$$

№3



1) четырехугольник ADBE - вписанный по опр. $\Rightarrow$ т.к. $\angle AEB$ - вписанный и опирается на диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90°$, аналог. $\angle ADB = 90°$.

2) Пусть $\angle DBA = \alpha$, $\angle CBA = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBD = \arcsin(0{,}6) = \alpha + \beta$.

$6 = FD = FE$, как касат. из F.

$\angle FDC = \angle ABD = \alpha$, по т. об угле между касат. и хордой с учетом того, что дуга $AD = 2\angle ABD$. Аналог. $\angle FEA = \beta$.

3) Рассмотрим четырехугольник FDBE, в нем сумма углов 360°, как сумма углов четырехуг. $\Rightarrow \angle DFE = 360° - \angle FEB - \angle FDB - \angle EBD = 180° - 2(\alpha+\beta) = 180° - 2\cdot\angle CBD$. По т. косинусов в $\triangle EFD$: $ED^2 = FD^2 + FE^2 - 2FD\cdot FE\cdot\cos\angle DFE = 36\cdot 2 - 2\cdot 36\cdot(-(1-2\sin^2\angle\arcsin 0{,}6)) = \frac{32}{25}\cdot 2\cdot 36 = \left(\frac{8\cdot 6}{5}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ED > 0$ $\Rightarrow ED = 9{,}6$. По т. синусов в $\triangle ABE$ и $\triangle EDB$ вписанных в окр-ть: $\frac{ED}{\sin\angle CBD} = 2R = \frac{AB}{\sin\angle ADB}$ $\Rightarrow$ ($\angle ADB = 90°$) $AB = \frac{9{,}6}{0{,}6} = 16$

olymp.bmstu.ru

Сумма

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 3

№1

1. Рассмотрим всевозможные комбинации цветов на 1ой ноге из белого, чёрного и серого цветов. Их кол-во = $(3)^3$, но среди этих вариантов есть варианты, где встречаются 3 одинаковых цвета на 1ой ноге, но т.к. каждого цвета по 2 шт. => комб. из 3ех одинаковых цветов быть не может =>

=> кол-во комбинаций на ноге $3^3 - 3 = 24$.
(все чёрные, либо белые, либо серые) } 3

2. Выбрав носки на 1ую ногу у нас определена комбинация цветов на 2ую ногу т.к. всего 6 цветов, по 3 на каждую

=> Вариантов цветов на 2 ноги = 24 · 2 = 48

3. Т.к. ~~важно~~ важно какие носки были до и после, умножаем на 3! для каждой ноги, т.к. важно на какую ногу => домножаем на 2-кол-во ног.

4. Т.к. можно выворачивать носки => каждый носок может быть либо вывернут, либо нет => домножаем на 2^{6} кол-во носков

Итого: $24 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2^6 = 36864$

Ответ: 36864

Можно использовать оборот листа для записи решений

$S'_{проекции} = S'_{фигуры} \cdot \cos\angle(\text{плоск. проекции, плоскость фигуры}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. по опр. φ - угол между $(ABC), \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow S'_{сечения} = \frac{S'_{ABCD} - S'_{AKL}}{\cos\varphi} = \frac{S'_{ABCD} - S'_{AKL}}{3/5}$, из усл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S'_{сечения}}{S'_{ABCD}} = \frac{S'_{ABCD} - S'_{AKL}}{\frac{3}{5} S'_{ABCD}} = \frac{35}{24} \Rightarrow S'_{ABCD} = 8 S'_{AKL}$. $\Rightarrow$

Т. Т явно близко к A, чем к C т.к. $S'_{ALL} = \frac{S'_{ABCD}}{8} < \frac{S'_{ABCD}}{2}$.

$\Rightarrow \frac{AL}{AB} = \frac{AK}{AD} = \frac{1}{2}$, где $K, L \in \alpha$ т.к. $KL \parallel BD$, $T \in KL$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ из подобия $\triangle AKL \sim \triangle ABD \Rightarrow AL = \frac{1}{2}AB$, $AK = \frac{1}{2}AD$,

QKL - ур. линия по опр. т.к. $\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{C_1C}{CT} = \frac{4}{3}$.

Пусть $C_1C = 4x \Rightarrow CT = 3x$. Тогда т.к. KL - ур. линия $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Фалеса $AT = TO$, где $O = AC \cap BD$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. в основании ромб, то $TO = x$, $AT = x$, $AC = 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $C_1C \perp (ABC)$ (по опр. прямой призмы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ искомый угол $= \angle AC_1C$; $\operatorname{tg}\angle AC_1C = \frac{4x}{4x} = 1 \Rightarrow$ т.к.

угол между диаг. и плоскостью $< 90^\circ$ из опр. $\Rightarrow \angle AC_1C = 45^\circ$,

искомый угол 45°

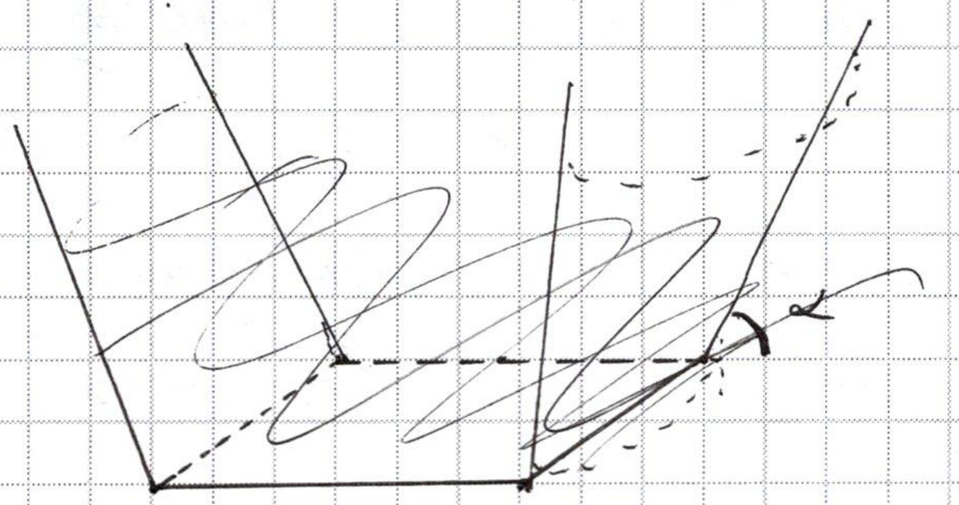
Ответ: 45°

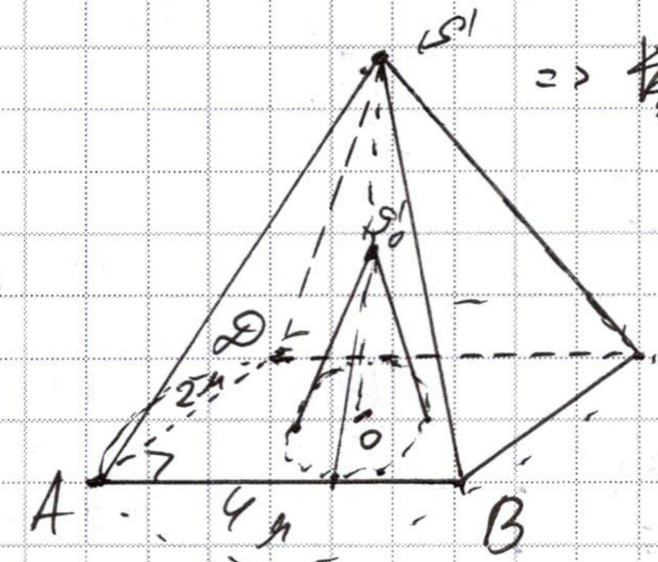
№6

Т.к. есть ограничение на α, то вписать пирамиду

можно лишь в $\max$ конус у которого угол наклона $= \alpha$,

пирамида это будет правильная (в основании лежит правильный многоугольник либо в пирамиде с прямоугольными основаниями)





$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S'_{ABCD} \cdot SO$,

где SO высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow S'O \perp (ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle S'OB = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \angle OBS \Rightarrow$

$\Rightarrow S'O = \operatorname{tg}\alpha \cdot OB = 3\sqrt{5}$ м $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5}$ м $\cdot 2$ м $\cdot 4$ м $= 8\sqrt{5}$ м^3, остальная фигура

olymp.bmstu.ru

$\angle EAB = 90° - \beta$, $\angle DAB = \angle KAC = 90° - \alpha$, где L : $CL \perp BK$, $L \in CK$.

4) четырехугольник $CLDB$ - вписанный с диам. BC т.к. $\angle CLB = \angle CDB =$

$= 90°$, $\angle LDK = \alpha = \angle CBK = \beta$, как внис. угла $\Rightarrow \alpha = \beta$. ~~$\Rightarrow \triangle ACK$~~ по

$\Rightarrow \triangle CKA$ - р/б, $\angle CAE = \alpha + \beta = \angle CAD \Rightarrow AC = \frac{CE}{0,6}$, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\frac{\angle CAD}{2} = \sqrt{\frac{4/5 + 1}{2}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{10}}$ ~~$\cos\angle BCD = \frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{3}$~~ радиус окр-ти описанной вокруг $\triangle ACK =$

$= R = \frac{AK}{2\sin\alpha}$ = радиус опис. окр-ти вокруг $\triangle BAD \Rightarrow \angle BKE = 90° - (\alpha + \beta) =$

$= 90° - \angle CBD \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin(90° - \angle CBD)} = \frac{16}{2 \cdot 4/5} = 10$

Ответ: ~~10~~ 10

№ 4

$P(x;y) = x^3 + 8y^3 - 3xy^2 - 6x^2y - x - 2y = (x+2y)^3 - 12x^2y - 15xy^2 - x - 2y =$

$= (x+2y)(x^2 + 4xy + 4y^2 - 1) - 12x^2y - 15xy^2 (=)$

Рассмотрим вспомогательное $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = 0$ $D_x = 16y^2 - 16y^2 + 4 = 2^2$

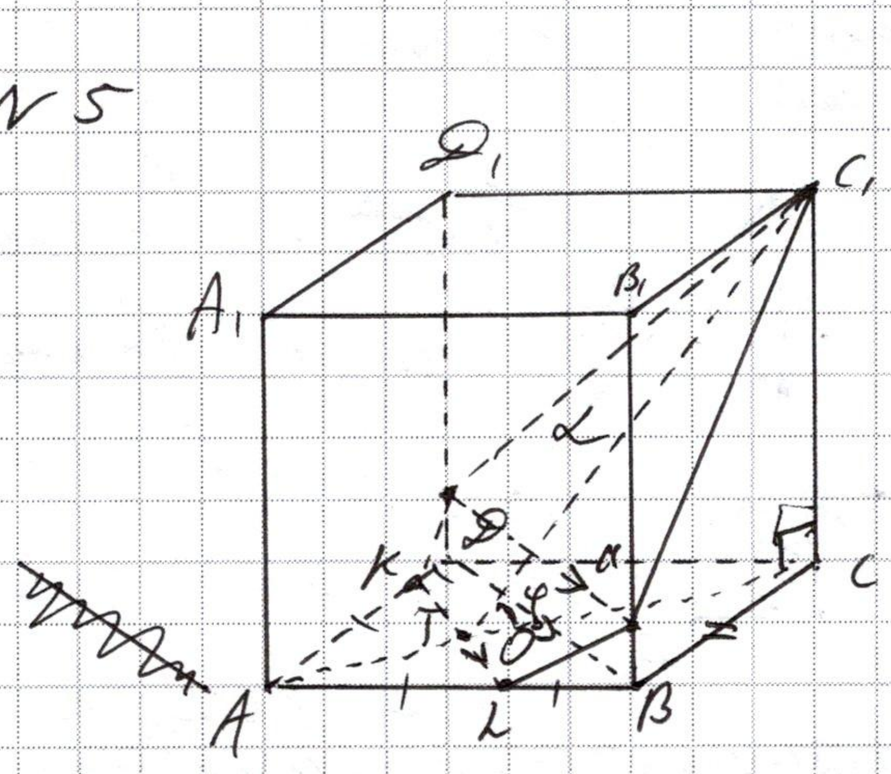
$\Rightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = (x + 2y - 1)(x + 2y + 1)$

$(=) (x+2y-1)(x+2y)(x+2y+1) - 3xy(4x+5y)$. Пусть $a = x + 2y$, $a \in \mathbb{Z}$.

произв. 3-х пос. целых чисел т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$

$P(a;y) = (a-1)\cdot a(a+1) - \underbrace{3\cdot(2a+y)\cdot(a-2y)\cdot y}_{\in \mathbb{Z},\ \vdots 3,y} = (a-1)(a+1)\cdot a - 3(2a^2 - 2y^2 - 3ay)\cdot y$

№ 5



1) Призма прямая $\Rightarrow C_1C \perp (ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACC_1 = 90° \Rightarrow \angle(\alpha; (ABC)) = \angle C_1TC$,

где T : $\alpha \cap AC$, α - плоскость

сечения. $\angle C_1TC = \operatorname{arctg} 4/3 = \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\varphi = 3/5$.

2) Воспользуемся площадью проекции.

Заметим, что произв. 3^ых под. чисел делится на 3. В самом деле, ~~всех одного из чисел~~ ~~в 3~~ существует 3 остатка по mod 3: {0, 1, 2} числа отлич. на 1 последовательно они дают 3 разных. остатка
=> будет число :3 => P(x;y) :3 => Всего значений P(x;y) = 0, 40 ≤ 10 000 000 равно кол-ву чисел :3 в том же промежутке. Тогда их кол. во

$$\frac{9\,999\,999}{3} = 3\,333\,333$$

Ответ: 3 333 333

можно не рассматривать т.к. ~~вершины~~ их основания должны лежать в прямоугольнике ABCD, а у ~~конуса~~ всех ост. фигур $S'_{основания} \leq S'_{ABCD}$, и из-за ограничения по углу на высота $\leq SO = 3\sqrt{5}$ м $\Rightarrow V \leq 8\sqrt{5}$ м^3

Для нахождения объема W разделим пирамиду на 3 части. ~~Из центра~~ (1) отсечена плоскостью $\Pi(ABC)$ и расстояние между плоскостями $= 2H/3$, (2) между этой пл. и параллельной плоскостью на расстоянии $H/3$ от основания и (3) между ост. и пл. плоскостью $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (3) + (2) – пирамиды, (1) – пирамида с (1)+(2)+(3) теми пирамидами, которые соотн. с коэф. подобия пир. высот соотн. 2 : 1 : 3 $\Rightarrow$ Если объем (1) $= V_1 \Rightarrow$ (2): $\frac{V_2 + V_1}{V_1} = 2^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2 = 7V_1$, где V_1, V_2, V_3 – объемы фигур (1), (2), (3), $\Rightarrow$

$\frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_1} = 3^3 = 27 \Rightarrow V_3 = 19V_1 \Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 \leq V \Rightarrow 27V_1 \leq 8\sqrt{5} \Rightarrow V_1 \leq \frac{8}{27}\sqrt{5}$

$\Rightarrow W = 0{,}3 \cdot V_1 + 0{,}6 \cdot V_2 + 0{,}9 \cdot V_3 = 0{,}3V_1 + 0{,}6 \cdot 7V_2 + 0{,}9 \cdot V_3 = 72V_1 \cdot 0{,}3 \leq \frac{32}{5}\sqrt{5}$ м^3

$\Rightarrow W = \frac{32}{5}\sqrt{5}$ м^3

Ответ: $V = 8\sqrt{5}$ м^3

$W = \frac{32}{5}\sqrt{5}$ м^3

№2 (продолжение)

① – ② $= 2\sqrt{7} \cdot 3_1 (C_{100}^1 9^{49} \cdot 7 + C_{100}^3 9^{48} \cdot 7^2 + C_{100}^5 9^{47} \cdot 7^3 + \ldots C_{100}^{97} \cdot 9 \cdot 7^{48} + C_{100}^{99} \cdot 7^{50})$,

а произведение ① ② $= (3+\sqrt{7})^{100} \cdot \frac{2^{100}}{(3+\sqrt{7})^{100}} = 2^{100}$

№4 (продолжение)

число: любое число вида, не кратное 3

$P(a;y) = (a-1) \cdot a(a+1) - 3(2a+y)(a-2y) \cdot y$

Если x или $y = 0$, то $P(x;y)$ – принимает все знач. равные произв. 3 ух подр. чисел.

Можно использовать оборот листа для записи решений